DESIGUALTATS

Ignasi Mundet i Riera

Per començar, deixa'm proposar-te dos problemes...

• Suposem que tenim n nombres reals qualssevol $a_1, \ldots, a_n$, de manera que la seva suma sigui 1. Demostra que la suma dels quadrats d'aquests nombres és més gran que $1/n$.

• Prenem novament n nombres reals, $a_1, \ldots, a_n$, però ara exigim que siguin positius. Suposem que el seu producte és igual a 1. Demostra que llavors la seva suma és més gran que n.

Abans de continuar llegint, intenta resoldre'ls...

Te n'has cansat? Doncs deixa'm donar-te una pista. Mira de resoldre aquest problema: *Demostreu que per a tot nombre real x es té la desigualtat*

$$x^2 - 6x + 13 \geq 4.$$

Aquest és més fàcil, no? Va, vinga, pensa'l.

És probable que el primer que hagis fet sigui derivar. Molt bé; és una possibilitat. Ara, tot i que a tu et sembli molt natural, deixa'm dir-te (no t'ofenguis!), que això és un pel recargolat. En efecte, si escrivim

$$x^2 - 6x + 13 = (x-3)^2 + 4,$$

i recordem que un nombre real elevat al quadrat *sempre* és més gran o igual que zero, el problema és obvi. Aquesta pista no és cap tonteria. Les derivades són un instrument potentíssim i molt astut, però n'hi ha d'altres més elementals i senzills que permeten resoldre els dos problemes del començament. En canvi, si vols fer-ho usant tècniques de càlcul infinitesimal, el més probable és que et faltin alguns coneixements (cosa molt normal). Per tant, intenta resoldre els dos problemes amb aquesta *eina*: tot nombre real elevat al quadrat és més gran o igual que zero. Au, a pensar!

Com que veig que tornes a llegir, t'explico algunes maneres de solucionar els dos problemes. És perfectament possible que tu ja els hagis resolt, però que hagis seguit un altre camí (ja me l'explicaràs). Espero que, en tot cas, les solucions que et dono et resultin interessants...

La desigualtat de Cauchy-Schwartz

Anem a resoldre el primer. Recordes la fórmula del producte escalar? Si tens dos vectors de l'espai, $x = (x_1, x_2, x_3)$ i $y = (y_1, y_2, y_3)$, el seu producte escalar $x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

és igual al producte dels mòduls de x i y pel cosinus de l'angle que determinen els dos vectors. Ara bé, com que per a qualsevol nombre α real el valor absolut de $\cos\alpha$ està entre 0 i 1, resulta que

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = x.y \leq \|x\| \cdot \|y\| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)^{1/2}.$$

Elevant-ho tot al quadrat i comparant els termes dels extrems, obtenim:

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2).$$

Ens podem preguntar: si en lloc de prendre vectors en dimensió tres els agafem en una dimensió arbitrària, segueix essent certa aquesta desigualtat? La resposta és afirmativa. Escrivim-ho bé:

TEOREMA. *Siguin $x_1, \ldots, x_n$ i $y_1, \ldots, y_n$ nombres reals. Llavors es compleix*

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2).$$

Aquesta desigualtat s'anomena **desigualtat de Cauchy-Schwartz**. Demostrem-la. Escrivim $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Si prenem qualsevol nombre real λ, es compleix

$$(x - \lambda y) \cdot (x - \lambda y) = \|x - \lambda y\|^2 \geq 0.$$

Desenvolupem i obtenim

$$(x - \lambda y) \cdot (x - \lambda y) = x \cdot x - 2\lambda x \cdot y + \lambda^2 y \cdot y.$$

Fixa't ara en el terme de la dreta. Oi que és un polinomi en λ amb coeficients reals? A més, hem quedat que aquest polinomi sempre és positiu. Això, ja ho deus saber (i si no, mira de demostrar-ho), implica que el discriminant del polinomi és negatiu. Escrivim-ho:

$$0 \geq (2x \cdot y)^2 - 4(x \cdot x)(y \cdot y).$$

Desenvolupa el terme de la dreta, divideix per quatre, i obtindràs que

$$(x \cdot x)(y \cdot y) \geq (x \cdot y)^2,$$

que és el que volíem demostrar (escrit d'una altra manera). Doncs ara torna a pensar el primer problema, a veure si et surt.

Desigualtat MA-MG

Si tens n nombres reals, $x_1, \ldots, x_n$, la seva mitjana aritmètica es defineix:

$$M_A(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

Segur que això ja t'ho havien explicat (potser sols escriure la mitjana $\bar{x}$). Ara bé, no se t'ha acudit mai que es podria fer la mitjana d'una altra manera? Per exemple, en lloc de sumar els nombres i dividir per n, podríem multiplicar-los i calcular l'arrel n-èssima del resultat. Aquesta mitjana s'anomena mitjana geomètrica; l'escriurem:

$$M_G(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^{1/n}$$

Quina relació hi ha entre les mitjanes M_A i M_G? Per exemple, quina és la més gran? Està clar que si els nombres $x_1, \ldots, x_n$ poden ser tant negatius com positius, a vegades $M_A > M_G$ i a vegades $M_A < M_G$ (per què?). Per tant, a partir d'ara considerarem mitjanes de nombres positius. Què es pot dir aleshores? Mirem què passa amb dos nombres positius a i b. Llavors $M_A(a, b) = \frac{a+b}{2}$ i $M_G(a, b) = \sqrt{ab}$. Quina és més gran? Va, a veure si ho endevines!

Sí, és clar: sempre es compleix $M_A(a, b) \geq M_G(a, b)$. Per demostrar-ho podem fer servir el truc de sempre:

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

Desenvolupo i em surt:

$$a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$$

i per tant:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Ja està. Ah, per cert! En quins casos és $M_A(a, b) = M_G(a, b)$? (Això t'ho deixo a tu perquè ho pensis.)

I què passa si en lloc de considerar mitjanes de dos nombres, les agafem de tres nombres? O de qualsevol quantitat de nombres? Doncs resulta que la desigualtat $M_A \geq M_G$ sempre es compleix. Això se sol anomenar **la desigualtat entre la mitjana aritmètica i la mitjana geomètrica** (o, més curt: **desigualtat MA-MG**):

TEOREMA. *Siguin $x_1, \ldots, x_n$ nombres reals positius. Llavors es compleix:*

$$M_A(x_1, \ldots, x_n) \geq M_G(x_1, \ldots, x_n),$$

i només hi ha igualtat quan $x_1 = \cdots = x_n$.

T'explico una demostració (molt bonica) que en va donar un matemàtic hongarès que es diu G.Pólya. Primer de tot, demostra (si no la saps), aquesta desigualtat: per a tot x real, $e^{x-1} \geq x$. (En quins casos hi ha igualtat?).
Diguem $M_A(x_1, \ldots, x_n) = a$ i escrivim:

$$\begin{aligned} e^{\frac{x_1}{a}-1} &\geq \frac{x_1}{a} \\ e^{\frac{x_2}{a}-1} &\geq \frac{x_2}{a} \\ &\cdots \\ e^{\frac{x_n}{a}-1} &\geq \frac{x_n}{a} \end{aligned}$$

Multiplico tots els termes de la dreta i tots els de l'esquerra i obtinc:

$$e^{\frac{x_1+\cdots+x_n}{a}-n} \geq \frac{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}{a^n}.$$

I si ara uso que $M_A(x_1, \ldots, x_n) = a$ a l'esquerra em queda un $e^0 = 1$ i per tant:

$$1 \geq \frac{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}{a^n}$$

(això és el que volíem demostrar, no?). Queda per veure que només hi ha igualtat quan tots els x_i són iguals (va, fes-ho tu).
..i ara sí que pots solucionar el segon problema.

Altres mitjanes

T'explicaré una altra manera de demostrar la desigualtat anterior. És menys enginyosa, però es pot usar per demostrar moltes altres desigualtats entre mitjanes. Observa aquestes propietats trivials de la mitjana aritmètica:
1. $M_A(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n}) = M_A(M_A(x_1, \ldots, x_n), M_A(x_{n+1}, \ldots, x_{2n}))$.
2. Si $x_1 \geq y_1, \ldots, x_n \geq y_n$, llavors $M_A(x_1, \ldots, x_n) \geq M_A(y_1, \ldots, y_n)$.
3. Si $y < M_A(x_1, \ldots, x_n)$, llavors $y < M_A(y, x_1, \ldots, x_n) < M_A(x_1, \ldots, x_n)$.
4. Si $y > M_A(x_1, \ldots, x_n)$, llavors $y > M_A(y, x_1, \ldots, x_n) > M_A(x_1, \ldots, x_n)$.

Comprova que la mitjana geomètrica també ho compleix (de fet, és ben raonable que una mitjana tingui aquestes propietats, no?). Ara siguin $x_1, \ldots, x_n$ nombres positius. Per demostrar la desigualtat $M_A(x_1, \ldots, x_n) \geq M_G(x_1, \ldots, x_n)$, usarem inducció sobre n. El cas $n = 2$ és fàcil, i l'hem vist al començament de la secció anterior. Suposem doncs que

$n > 2$ i que el teorema és cert per a tot enter k, $2 \leq k < n$. Si n és parell, $n = 2m$, uso la hipòtesi inductiva:

$$M_A(x_1, \ldots, x_m) \geq M_G(x_1, \ldots, x_m),$$
$$M_A(x_{m+1}, \ldots, x_{2m}) \geq M_G(x_{m+1}, \ldots, x_{2m}),$$

i les propietats anteriors:

$$\begin{aligned} M_A(x_1, \ldots, x_{2m}) &= M_A(M_A(x_1, \ldots, x_m), M_A(x_{m+1}, \ldots, x_{2m})) \geq \\ &\geq M_A(M_G(x_1, \ldots, x_m), M_G(x_{m+1}, \ldots, x_{2m})) \geq \\ &\geq M_G(M_G(x_1, \ldots, x_m), M_G(x_{m+1}, \ldots, x_{2m})) = \\ &= M_G(x_1, \ldots, x_{2m}) \end{aligned}$$

Ara suposem que n sigui senar, $n = 2m + 1$. Vegem que aquí també funciona la cosa. Suposem el contrari, i arribarem a un absurd. Sigui doncs

$$a = M_A(x_1, \ldots, x_n) < M_G(x_1, \ldots, x_n) = b$$

Aleshores prenc un y tal que $a < y < b$. Per les propietats de les mitjanes,

$$a < M_A(y, x_1, \ldots, x_n) < y < M_G(y, x_1, \ldots, x_n) < b.$$

És a dir, que

$$M_A(y, x_1, \ldots, x_n) \leq M_G(y, x_1, \ldots, x_n).$$

Però $y, x_1, \ldots, x_n$ són $n + 1 = 2m + 2$ nombres. Ara, per hipòtesi inductiva, el teorema és cert per $m + 1$ nombres (comprova que $m + 1 < n$). Però hem vist abans que si el teorema és cert per $m + 1$, llavors també ho és per $2m + 2$. Per tant ha de ser

$$M_A(y, x_1, \ldots, x_n) \geq M_G(y, x_1, \ldots, x_n).$$

Contradicció! (i, per tant, ja hem acabat).

Vegem com aquesta tècnica es pot usar per probar altres desigualtats. Fixa't que per veure que en general $M_A \geq M_G$, només he usat que tant M_A com M_G compleixen les propietats (1) a (4) i que si prenem dos nombres, aleshores la desigualtat és certa (aquest últim fet és fàcil de demostrar).

Definim ara la mitjana harmònica dels nombres positius diferents de zero $x_1, \ldots, x_n$:

$$M_H(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \right)$$

Ara, per veure que sempre $M_H \leq M_A$, només cal comprovar-ho considerant les mitjanes de dos nombres, i després verificar que la mitjana M_H també compleix les propietats (1) a (4) (fes-ho!).

En general, si $x_1, \ldots, x_n$ són nombres positius diferents de zero i $\alpha \neq 0$ és un nombre real, es defineix:

$$M_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_1^\alpha + \cdots + x_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}$$

Observa que la mitjana aritmètica és M_1 i l'harmònica M_{-1}. Definim també

$$M_0(x_1, \ldots, x_n) = M_G(x_1, \ldots, x_n).$$

Aleshores es pot demostrar aquest

TEOREMA. *Siguin α i β dos nombres reals qualssevol, i suposem que $\alpha < \beta$. Llavors*

$$M_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \leq M_\beta(x_1, \ldots, x_n),$$

amb igualtat només quan tots els x_i són iguals. Et veus amb cor de demostrar-lo? Pensa una estona i veuràs que amb tot el que t'he explicat és força fàcil.

... i altres desigualtats

Desigualtat de Young

Sigui $y = \phi(x)$ una funció que per $x \geq 0$ és contínua, estrictament creixent (és a dir, si $x_1 > x_2 \geq 0$ llavors $\phi(x_1) > \phi(x_2)$) i tal que $\phi(0) = 0$, i $\phi(x) \to \infty$ quan $x \to \infty$. Llavors existeix la funció inversa de ϕ, que escriurem ψ. Es compleix per a tot x positiu que $\psi(\phi(x)) = x$. Aleshores, si a i b són nombres positius, la **desigualtat de Young** diu que

$$ab \leq \int_0^a \phi(x)dx + \int_0^b \psi(x)dx.$$

Per demostrar-la, dibuixa el gràfic de ϕ i veuràs que el resultat és absolutament obvi (pots considerar per separat els casos $b > \phi(a)$, $b = \phi(a)$ i $b < \phi(a)$).

Desigualtat de Hölder

Considera la desigualtat de Young amb la funció $\phi(x) = x^{p-1}$. Juga una mica i obtindràs la **desigualtat de Hölder**: *Si p i q són positius tals que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, aleshores*

$$ab < \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Desigualtat de Jensen

Sigui ϕ una funció definida per a tot nombre real que sigui convexa. Llavors, si $x_1, \ldots, x_n$ són nombres reals qualssevol, es compleix

$$\phi\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right) \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)}{n}.$$

Més en general, si f és una funció real definida a l'interval $[0,1]$, llavors

$$\int_0^1 \phi(f(s))ds \geq \phi\left(\int_0^1 f(s)ds\right).$$

Desigualtat de Bernouilli

Sigui $x \geq -1$ i $0 < \alpha < 1$. Llavors

$$(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x.$$

En canvi, si $\alpha < 0$ o $\alpha > 1$, llavors es compleix

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x.$$

Només hi ha igualtat (en els dos casos) quan $x = 0$. (Aquesta és fàcil de demostar.)

Problemes

Per acabar, uns quants problemes. Alguns es resolen amb el que hem vist fins ara; d'altres amb una mica d'imaginació i prou; i d'altres, amb les dues coses.

Problemes senzills

DE1.–Sigui $n > 1$ un nombre natural. Demostra que

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

DE2.–Demostra que si $x + y + z = 6$ llavors $x^2 + y^2 + z^2 \geq 12$.

DE3.–Quin dels dos nómbres és més gran:

$$(19941994!)^2 \text{ ó } 19941994^{19941994}.$$

DE4.–Demostreu que per a qualsevol x real es compleix

$$e^x \leq x + e^{x^2}.$$

DE5.–Quina és la mínima longitud possible de la diagonal més gran d'un trapeci d'àrea 1?

DE6.–Demostreu que donats nombres reals T_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ arbitraris, es compleix la desigualtat

$$\sum_{j,k=1}^{n} \cos(T_k - T_j) \geq 0.$$

DE7.–A l'interior d'un quadrat de costat 1 hi ha nou punts. Demostreu que existeix un triangle amb l'àrea més petita que 1/8 i tal que els seus vèrtexs són tres dels nou punts donats.

DE8.–Suposem que n és un nombre natural, i que els nombres a_i (on $1 \leq i \leq n$) i p són reals i positius. Demostreu la desigualtat:

$$n \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{p+1} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{-1} \right).$$

DE9.–Sabem dels nombres $a_1, \ldots, a_n$, que per a qualsevol k es compleix la desigualtat $a_{k+1} - 2a_k + a_{k-1} \geq 0$ i a més a més que $a_1 = a_n = 0$. Demostreu que aleshores tots els a_j són no positius.

DE10.–Existeix alguna funció injectiva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que compleixi per a qualsevol $x \in \mathbb{R}$ la desigualtat $f(x^2) - (f(x))^2 \geq 1/4$?

DE11.–Demostra la desigualtat

$$\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$

Problemes no tan senzills

DE12.–Demostra la desigualtat

$$\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

DE13.–Demostra la desigualtat

$$\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100} < \frac{1}{12}.$$

DE14.–Demostra que per a qualssevol nombres positius $x_1, \ldots, x_n$ es té la desigualtat

$$\frac{x_1}{x_2+x_3} + \frac{x_2}{x_3+x_4} + \cdots + \frac{x_{n-2}}{x_{n-1}+x_n} + \frac{x_{n-1}}{x_n+x_1} + \frac{x_n}{x_1+x_2} \geq \frac{n}{4}.$$

DE15.–Sigui A un conjunt de S punts a l'espai de tres dimensions. Siguin S_x, S_y i S_z les quantitats de punts que surten a les projeccions ortogonals de A sobre els plans $x=0$, $y=0$ i $z=0$ respectivament. Demostra que

$$S^2 \leq S_x S_y S_z.$$

DE16.–Sigui f una funció no negativa, contínua i còncava a l'interval $[0,1]$ i tal que $f(0)=1$. Llavors

$$\int_0^1 xf(x)dx \leq \frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2.$$

Mostra de solucions

Solució del problema DE2

Aplicant la desigualtat Cauchy-Schwartz als vectors $u=(1,1,1)$ i $v=(x,y,z)$, surt

$$\left((1,1,1)\cdot(x,y,z)\right)^2 = (u\cdot v)^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2 = 3(x^3+y^2+z^2),$$

o bé, $36 = (x+y+x)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$, i d'aquí es dedueix, dividint per 3, el resultat. La desigualtat no es pot millorar, ja que el vector $(2,2,2)$ fa que sigui $x^2+y^2+z^2 = 12$.

Solució del problema DE6

Sigui el nombre complex

$$A = \sum_1^n e^{iT_j} = \sum_1^n \big(\cos T_j + i \sin T_j\big).$$

El seu conjugat és $\bar{A} = \sum_1^n e^{-iT_j} = \sum_i^n(\cos T_j - i\sin T_j)$, i el producte $A\bar{A}$, que és un nombre *real* més gran o igual que zero, és

$$0 \leq A\bar{A} = \sum_{j,k} e^{i(T_j - T_k)} = \sum_{j,k} \cos(T_j - T_k).$$

Observeu que la part imaginària de $A\bar{A}$, que és $\sum_{j,k}\sin(T_j - T_k)$, és nul·la, tan per la deducció anterior, com per la observació directa dels termes $\sin(T_r - T_s)$ i $\sin(T_s - T_r)$ iguals i de signe contrari.

Solució del problema DE11

Observem que

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4} < \frac{4}{5}, \quad \dots, \quad \frac{k-1}{k} < \frac{k}{k+1} < 1.$$

Això ens permet escriure

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdots\left(\frac{97}{98}\right)^2\left(\frac{99}{100}\right)^2 < \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{3}{4}\frac{4}{5}\cdots\frac{97}{98}\frac{98}{99}\frac{99}{100}\frac{100}{100} = \frac{1}{100}$$

i, fent l'arrel quadrada, surt el resultat

$$\frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$

Solució del problema DE15

Considerem la família $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$ de plans paral·lels a $z=0$ que contenen punts del conjunt donat: es fa passar per cada punt del conjunt inicial un pla paral·lel a $z=0$, i es treuen els plans repetits. Cada un dels plan π_i conté un o més punts del conjunt inicial. Sigui a_i el nombre de punts que són al pla π_i. Designem per x_i, (resp. y_i) el nombre de projeccions sobre $x=0$ (resp. $y=0$) dels punts del conjunt que són a π_i. Es compleix

$$S_x = \sum_1^k x_i, \quad S_y = \sum_1^k y_i, \quad a_i \leq x_i y_i, \quad a_i \leq S_z, \quad S = \sum_1^k a_i.$$

Calculant surt

$$S^2 = (a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^2 = \left(\left(\sqrt{x_1}, \ldots \sqrt{x_k}\right) \cdot \left(\frac{a_1}{\sqrt{x_1}}, \ldots, \frac{a_k}{\sqrt{x_k}}\right)\right)^2 \leq$$
$$\leq \left\|\left(\sqrt{x_1}, \ldots, \sqrt{x_k}\right)\right\|^2 \left\|\left(\frac{a_1}{\sqrt{x_1}}, \ldots, \frac{a_k}{\sqrt{x_k}}\right)\right\|^2 = \left(x_1 + \cdots + x_k\right)\left(\frac{a_1^2}{x_1} + \cdots + \frac{a_k^2}{x_k}\right) =$$
$$= S_x \left(\frac{a_1^2}{x_1} + \cdots + \frac{a_k^2}{x_k}\right) \leq S_x \left(\frac{a_1 S_z}{x_1} + \cdots + \frac{a_k S_z}{x_k}\right) = S_x \left(\frac{a_1}{x_1} + \cdots + \frac{a_k}{x_k}\right) S_z \leq$$
$$\leq S_x(y_1 + \cdots + y_k)\, S_z = S_x S_y S_z.$$